# 第７講　ベクトル

1　三角形 ABC があって，AB $=2$，AC $=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3$ である．

(1)　三角形 ABC の内接円の半径を求めよ．

(2)　三角形 ABC の内心を I とする．$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表すとき，$x$，$y$ の値を求めよ．

【Point Pickup】



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**2**　三角形 ABC の辺の長さをそれぞれ AB＝6, BC＝ $2\sqrt{13}$, CA＝8 とする.

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ.

(2)　三角形 ABC の外心を O とする. $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=l\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表すとき, $l$, $m$ の値を求めよ.

【Point Pickup】



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　空間内の4点 O(0, 0, 0), A(−1, 1, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 1) をとる.

(1)　直線 OA 上の点 H をとって CH と OA が垂直であるようにする. H の座標を求めよ. また, C′(0, 1, 0), $\angle \mathrm{CHC'}=\theta$ として $\cos\theta$ の値を求めよ.

(2)　直線 OA 上の点 P と直線 BC 上の点 Q との距離 PQ が最小となる P, Q の座標を求めよ.

【Point Pickup】



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第７講　ベクトル

**1**　三角形 ABC があって，AB＝2，AC＝$\sqrt{3}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$ である．

(1)　三角形 ABC の内接円の半径を求めよ．

(2)　三角形 ABC の内心を I とする．$\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ と表すとき，$x$，$y$ の値を求めよ．

(1)　$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2=3-2\times3+4=1$　よって　$|\overrightarrow{BC}|=1$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4\times3-9}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，求める内接円の半径を $r$ とすると

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)\quad より\quad \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}r(2+1+\sqrt{3})$$

よって　$\boldsymbol{r=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$

(2)　直線 AI と辺 BC の交点を D とすると，角の二等分線の性質より

$$BD:DC=AB:AC=2:\sqrt{3}\qquad よって\quad BD=\frac{2}{2+\sqrt{3}}BC=2(2-\sqrt{3})$$

$$AI:ID=AB:BD=2:2(2-\sqrt{3})=1:(2-\sqrt{3})$$

よって

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{1+(2-\sqrt{3})}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3-\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{2+\sqrt{3}}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{3-\sqrt{3}}\{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})\overrightarrow{AB}+2(2-\sqrt{3})\overrightarrow{AC}\}$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\overrightarrow{AB}+\frac{(3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{AC}$$

したがって　$\boldsymbol{x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}}$

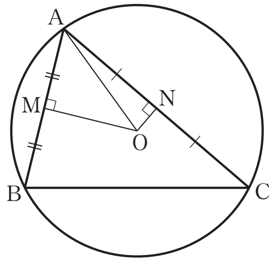
**2**　三角形 ABC の辺の長さをそれぞれ AB＝6，BC＝$2\sqrt{13}$，CA＝8 とする．

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ．

(2)　三角形 ABC の外心を O とする．$\overrightarrow{AO}=l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$ と表すとき，$l$，$m$ の値を求めよ．

(1)　$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2}=\frac{36+64-52}{2}=\boldsymbol{24}$$




(2)　AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\quad より\quad (\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AO})\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-l\overrightarrow{AB}-m\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2-l|\overrightarrow{AB}|^2-m\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

したがって　$6l+4m=3$　……①

$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　より　$(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AO})\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-l\overrightarrow{AB}-m\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2-l\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-m|\overrightarrow{AC}|^2=0$$

したがって　$3l+8m=4$　……②

①，②より　$\boldsymbol{l=\frac{2}{9}}$，$\boldsymbol{m=\frac{5}{12}}$

---

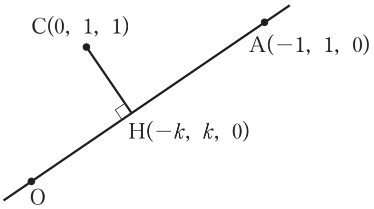
**3**　空間内の4点 O(0, 0, 0)，A(−1, 1, 0)，B(1, 0, 0)，C(0, 1, 1) をとる．

(1)　直線 OA 上の点 H をとって CH と OA が垂直であるようにする．H の座標を求めよ．また，C′(0, 1, 0)，$\angle CHC'=\theta$ として $\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　直線 OA 上の点 P と直線 BC 上の点 Q との距離 PQ が最小となる P，Q の座標を求めよ．

---

(1)　$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OA}=(-k,\ k,\ 0)$ とおくと，H$(-k,\ k,\ 0)$




$\overrightarrow{CH}=(-k,\ k,\ 0)-(0,\ 1,\ 1)=(-k,\ k-1,\ -1)$

$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　より　$k+(k-1)=0$

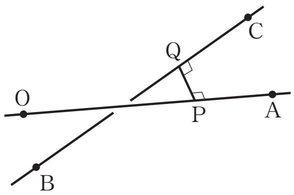
よって　$k=\frac{1}{2}$　　$\mathbf{H}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$

このとき　$\overrightarrow{HC}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)=\frac{1}{2}(1,\ 1,\ 2)$　より　$|\overrightarrow{HC}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\overrightarrow{HC'}=\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OH}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)=\frac{1}{2}(1,\ 1,\ 0)$　より　$|\overrightarrow{HC'}|=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HC'}}{|\overrightarrow{HC}||\overrightarrow{HC'}|}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

(2)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}=(-s,\ s,\ 0)$




$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC}=(1,\ 0,\ 0)+t(-1,\ 1,\ 1)=(-t+1,\ t,\ t)$

$\overrightarrow{PQ}=(s-t+1,\ t-s,\ t)$

$|\overrightarrow{PQ}|$ が最小となるのは　$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OA}$　かつ　$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$　のとき

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　より　$-s+t-1+t-s=0$　　よって　$2s-2t=-1$　……①

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　より　$-s+t-1+t-s+t=0$　　よって　$2s-3t=-1$　……②

①，②より　$s=-\frac{1}{2}$，$t=0$　　したがって　$\mathbf{P}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathbf{Q(1,\ 0,\ 0)}$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　三角形ABCは$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=6$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=3$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2$を満たしている．三角形ABCの重心をGとし，線分ABの中点をMとする．以下の問いに答えなさい．

(1)　線分MGの長さを求めなさい．

(2)　$\angle$AMGの二等分線と線分AGとの交点をNとするとき，線分ANの長さを求めなさい．

(3)　三角形AMGの内心をIとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を用いて表しなさい．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**2** 座標空間の 3 点 A(1, 2, 2), B(2, 1, 1), C(2, 4, 2) を通る平面を Z とする．点 D(0, 2, 1) を通り，ベクトル $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を $l_1$ とする．また点 D を通り，ベクトル $\vec{b}=(-1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線を $l_2$ とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $l_1$ と Z の交点を E とし，$l_2$ と Z の交点を F とする．E, F の座標を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ のなす角を $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(3) 三角形 DEF の面積を求めなさい．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第7講　ベクトル　　練習問題　解答

**1**　三角形ABCは$|\overrightarrow{AB}|=6$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$を満たしている．三角形ABCの重心をGとし，線分ABの中点をMとする．以下の問いに答えなさい．

(1)　線分MGの長さを求めなさい．

(2)　∠AMGの二等分線と線分AGとの交点をNとするとき，線分ANの長さを求めなさい．

(3)　三角形AMGの内心をIとするとき，$\overrightarrow{AI}$を$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$を用いて表しなさい．

**解答例**

(1)　$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{6}(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})$

$|\overrightarrow{MG}|^2=\dfrac{1}{36}\left(|\overrightarrow{AB}|^2-4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4|\overrightarrow{AC}|^2\right)=\dfrac{64}{36}=\dfrac{16}{9}$

よって　$|\overrightarrow{MG}|=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

> あるベクトルの大きさを求める時，それが1次結合の形で表されているならば，大きさの2乗により内積計算に持ち込む．その際，1次結合の形が「通分」されていれば分子は「整式」のような状態となり，2乗の計算のミスが減ることが多い．
> もちろん，与えられた大きさや内積の値により分数のままで計算した方がよい(計算中に分数でなくなる)場合もある．式と値を見回し，より良い方を選択できるよう訓練しておこう．

(2)　角の二等分線の性質より

**ベクトルの伸縮比や内分比・外分比に影響を及ぼす性質.**

AN：NG＝AM：MG＝3：$\dfrac{4}{3}$＝9：4　　よって　$AN=\dfrac{9}{13}AG$

$|\overrightarrow{AG}|^2=\dfrac{1}{9}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=\dfrac{1}{9}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2\right)=\dfrac{49}{9}$

よって　$|\overrightarrow{AG}|=\dfrac{7}{3}$

よって　　$AN=\dfrac{9}{13}\times\dfrac{7}{3}=\boldsymbol{\dfrac{21}{13}}$

(3)　角の二等分線の性質より

MI：IN＝MA：NA＝3：$\dfrac{21}{13}$＝13：7

よって　$\overrightarrow{AI}=\dfrac{7}{20}\overrightarrow{AM}+\dfrac{13}{20}\overrightarrow{AN}$

$=\dfrac{7}{20}\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{13}{20}\times\dfrac{9}{13}\overrightarrow{AG}$

$=\dfrac{7}{40}\overrightarrow{AB}+\dfrac{9}{20}\times\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=\boldsymbol{\dfrac{13}{40}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{20}\overrightarrow{AC}}$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

**2** 座標空間の3点 A(1, 2, 2), B(2, 1, 1), C(2, 4, 2) を通る平面を Z とする．点 D(0, 2, 1) を通り，ベクトル $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を $l_1$ とする．また点 D を通り，ベクトル $\vec{b}=(-1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線を $l_2$ とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $l_1$ と Z の交点を E とし，$l_2$ と Z の交点を F とする．E, F の座標を求めなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ のなす角を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(3) 三角形 DEF の面積を求めなさい．

**解答例**

(1) 平面 Z 上の点 P$(x,\ y,\ z)$ について

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}})$ より

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 2)+\alpha(1,\ -1,\ -1)+\beta(1,\ 2,\ 0)$$
$$=(1+\alpha+\beta,\ 2-\alpha+2\beta,\ 2-\alpha)\quad\cdots\cdots①$$

また，直線 $l_1$ 上の点 Q$(x,\ y,\ z)$ について $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\vec{a}}$ とすると　← 直線の作成

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 1)+s(1,\ 1,\ 1)=(s,\ 2+s,\ 1+s)\quad\cdots\cdots②$$

P と Q が一致するとき，①，②より

$$\begin{cases}1+\alpha+\beta=s\\2-\alpha+2\beta=2+s\\2-\alpha=1+s\end{cases}$$

> 「交点」の座標は，一般的に2式を連立することによって求める．ベクトルにおいても同様，2通りで表して比較するが，今回のように「ベクトル方程式」(いつもなら $y$ を $x$ で表した式) を作成し，個々の座標に注目・比較する時と，1次独立な2つ（3つ）のベクトルで表し，その係数に注目・比較する場合に大きく分かれる．

これらより，$\alpha=-\dfrac{1}{4}$，$\beta=\dfrac{1}{2}$，$s=\dfrac{5}{4}$　　よって　$\mathbf{E}\left(\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}},\ \dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{4}},\ \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}\right)$

同じく，直線 $l_2$ 上の点 R$(x,\ y,\ z)$ について

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\vec{b}$　より

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 1)+t(-1,\ -1,\ 1)=(-t,\ 2-t,\ 1+t)\quad\cdots\cdots③$$

P と R が一致するとき，①，③より

$$\begin{cases}1+\alpha+\beta=-t\\2-\alpha+2\beta=2-t\\2-\alpha=1+t\end{cases}$$

これらより，$\alpha=-\dfrac{3}{2}$，$\beta=-2$，$t=\dfrac{5}{2}$　　よって　$\mathbf{F}\left(-\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}},\ -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\right)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{5}{4}\vec{a}$　　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{5}{2}\vec{b}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ のなす角は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角に等しい．

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-1-1+1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\mathbf{-\frac{1}{3}}$$

> ここを(2)の解答の冒頭にいきなり記述してはならない．なぜならば，2ベクトルのなす角は，2直線のなす角とは異なりその「方向」によって定まる．
> つまり $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\vec{a}$ の「向き」が同じなのか逆なのかを考える必要がある．それにより鋭角と鈍角が入れ替わる．
> 向きによって異なるのは内積も同様である．

(3) $\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$\triangle\mathrm{DEF}=\dfrac{1}{2}\mathrm{DE}\times\mathrm{DF}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{4}|\vec{a}|\times\dfrac{5}{2}|\vec{b}|\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\mathbf{\dfrac{25\sqrt{2}}{8}}$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。